



## **RELATÓRIO FINAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA**

**CÂMPUS VOTUPORANGA**

# **PÁGINA NA INTERNET PARA CÁLCULO DE CÍRCULO DE MOHR**

**NOME:** GUILHERME AUGUSTO RODRIGUES PERES PINTO

**ORIENTADOR:** CRISTIANE PRADO MARIN

**COLABORADOR INTERNO:** GUSTAVO CABRELLI NIRSCHL

**MODALIDADE DE IC:** PIBIFSP

**VIGENCIA:** 01/03/2016 A 30/11/2016

**NOVEMBRO DE 2016**

## RESUMO

Existem inúmeros programas de computador que realizam praticamente todos os cálculos de Engenharia Civil. Normalmente, tais programas mostram somente os resultados finais ou alguns passos para se chegar até eles. Neste contexto, foi criado um grupo de pesquisa (chamado NEVE, cadastrado no CNPq) para criar programas que não só façam cálculos, mas que demonstrem todo o procedimento realizado. Levando em consideração a evolução tecnológica, o desenvolvimento dos aplicativos é feito na linguagem HTML/Javascript, que pode ser estudada em W3... (2015), permitindo a disponibilização on-line, numa página de internet já criada (<http://vtp.ifsp.edu.br/nev/>). Como resultado final desta iniciação científica, foi criado um programa que calcula o Círculo de Mohr, que pode ser estudado em Beer (2011) ou em Hibbeler (2010), para quaisquer estados de tensão e deformação.

**Palavras-chave:** *Círculo de Mohr, página de internet, programa de computador.*

## ABSTRACT

There are many softwares that perform almost all calculations of Civil Engineering. Typically, such programs only show the final results or some steps to get to them. In this context, a research group (called NEVE, registered in CNPq) was created to develop programs that not only do calculations, but demonstrate the whole procedure performed. Taking account of technological evolution, the development of applications is done in HTML / JavaScript, which can be studied in W3 ... (2015), allowing availability in a web page already created ([http : // vtp.ifsp.edu.br/nev/](http://vtp.ifsp.edu.br/nev/)) . As a final result of this scientific research, a program that calculates the Mohr Circle, that can be studied in Beer (2011) or Hibbeler (2010), for any stress and strain values was created.

**Keywords:** *Mohr Circle, web page, software.*

## Sumário

1. INTRODUÇÃO .....	7
2. REVISÃO DA LITERATURA .....	8
2.1 Fundamentos de estática .....	8
2.2 Tensão .....	8
2.2.1 Tensão normal .....	10
2.2.2 Tensão de cisalhamento .....	10
2.2.3 Estado Geral de tensão.....	10
2.3 Círculo de Mohr de tensões .....	11
2.3.1 Transformação de tensão no plano .....	11
2.3.2 Exemplo de construção de Círculo de Mohr para o Estado Plano .....	17
2.3.3 Estado geral de tensão.....	18
2.4 Deformação.....	24
2.4.1 Deformação normal .....	24
2.4.2 Deformação de cisalhamento .....	25
2.5 Círculo de Mohr de deformações .....	25
2.5.1 Transformações de deformação no plano .....	25
2.5.2 Construção do círculo de Mohr para estado plano de deformação .....	28
2.5.3 Construção do círculo de Mohr para estado geral de deformação .....	29
3. RESULTADOS .....	31
4. CONCLUSÕES .....	39
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	40

## Lista de Figuras

Figura 1 Forças numa área infinitesimal. Fonte: Hibbeler (2010).....	9
Figura 2 Componentes da tensão encontrada numa face. Fonte: Hibbeler (2010).....	9
Figura 3: Estado de tensão em um cubo em torno de um ponto. Fonte: Beer (2014).....	11
Figura 4 Simplificação das tensões para o estado plano. Hibbeler (2010). ....	12
Figura 5: Mudança dos eixos de referência. Hibbeler (2010). ....	12
Figura 6 Áreas em função de $\Delta A$ . Hibbeler (2010). ....	13
Figura 7 Representação da tangente do ângulo de máxima tensão normal.Hibbeler (2010). ....	14
Figura 8 Representação da tangente do ângulo da tensão máxima de cisalhamento. Hibbeler (2010). .....	15
Figura 9 Círculo de Mohr para tensão no plano. Hibbeler (2010).....	16
Figura10 Círculo de Mohr para tensões unidimensionais. Fonte: Mascia (2006).....	17
Figura 11 Condições do elemento. Fonte: Hibbeler (2010). ....	17
Figura 12 Círculo de Mohr.Fonte: Hibbeler (2010).....	18
Figura 13 Círculo de Mohr genérico do estado geral .Fonte: Hibbeler (2010). ....	19
Figura 14Deformação devido a uma carga normal. Fonte: Beer et. al. (2014). ....	24
Figura 15 O efeito de tensões de cisalhamento. Fonte: Fonte: Beer et. al. (2014). ....	25
Figura 16 Giro dos eixos de referência. Fonte: Beer et. al. (2014).....	26
Figura 17 Nova deformação. Fonte: Beer et. al. (2014).....	26
Figura 18 Círculo de Mohr para estado plano de deformações. Fonte: Beer et. al. (2014). ....	28
Figura 19 Círculo de Mohr genérico do estado geral de deformações. Fonte: Hibbeler (2010). ....	29
Figura 20 Apresentação da página criada. Fonte: o próprio autor. ....	31
Figura 21 Resultados fornecidos pela página utilizando os mesmos dados de entrada do exemplo 2.3.2. Fonte: o próprio autor. ....	32
Figura 22 Resultado do relatório pdf. Fonte: o próprio autor.....	35
Figura 23 Apresentação da página Círculo de Mohr para Deformação .....	35
Figura 24 Resultados fornecidos pela página para deformações .....	36
Figura 25Relatório pdf para deformação .....	38

# Lista de Símbolos

$\sigma$ : tensão normal

$\varepsilon$ : deformação normal

$\gamma$ : distorção

$\tau$ : tensão cisalhante

F: força

M: momento fletor

d: distância

x, y, z: direções de eixos cartesianos

$\Delta$ : variação

A: área da seção transversal

lim: limite

$x', y', z'$ : direções de eixos cartesianos rotacionados

$\theta$ : ângulo de  $x'-y'$  em a  $x-y$

$\theta_s$ : ângulo de tensão máxima de cisalhamento

$\theta_p$ : ângulo de tensão principal

R: raio do círculo de Mohr

# 1. INTRODUÇÃO

Existem inúmeros programas de computador que realizam praticamente todos os cálculos de Engenharia Civil. Normalmente, tais programas mostram somente os resultados finais ou alguns passos para se chegar até eles. Neste contexto, foi criado um grupo de pesquisa (chamado NEVE, cadastrado no CNPq) para criar programas que não só façam cálculos, mas que demonstrem todo o procedimento realizado. Levando em consideração a evolução tecnológica, o desenvolvimento dos aplicativos é feito na linguagem HTML/Javascript, que pode ser estudada em W3... (2015), permitindo a disponibilização on-line, numa página de internet já criada (<http://vtp.ifsp.edu.br/nev/>).

Neste contexto, esta pesquisa propõe a criação de um programa que calcula e desenha, com a geração de relatório em pdf contendo todos os passos dos cálculos, o Círculo de Mohr para quaisquer pares de tensão e deformação nos Estados Plano e Geral.

Quando se calcula a tensão num determinado ponto de um elemento estrutural, a princípio faz-se considerando um plano perpendicular à força atuante, gerando uma tensão normal ( $\sigma$ ), e um plano paralelo à força atuante, gerando uma tensão tangencial ou cisalhante ( $\tau$ ). Para o dimensionamento da região do elemento estrutural, essas tensões não são suficientes, sendo necessário calcular as tensões principais naquele ponto, que são a máxima e a mínima tensão normal a determinados planos inclinados em relação ao plano perpendicular à força atuante (planos principais).

O chamado Círculo de Mohr é justamente uma representação gráfica das tensões que ocorrem num determinado ponto da estrutura, em todos os seus planos inclinados. Conforme Beer (2001), o Círculo de Mohr se baseia em considerações geométricas simples, possibilitando visualizar graficamente o estado de tensão num determinado ponto de um elemento estrutural, o que levará ao posterior dimensionamento do elemento.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

Na Engenharia Civil, as estruturas devem ter estabilidade, resistência e segurança, além de serem economicamente viáveis.

A Resistência dos Materiais, segundo Hibbeler (2010), é um ramo da mecânica que estuda as relações entre as cargas externas a que um corpo deformável está sujeito e a intensidade da resposta do material por meio de forças internas. Esses estudos proporcionam equações que quantificam as tensões e as deformações desses corpos quando submetidos a forças externas.

### 2.1 Fundamentos de estática

Segundo Hibbeler (2010), para se manter estável, uma estrutura precisa que os diversos momentos e forças que agem sobre ela se equilibrem de maneira a se anularem vetorialmente (em intensidade e direção), como representado na Eq. (2.1), ou seja, um corpo pode estar estático se não atua sobre ele nenhuma força ou momento ou se suas forças e momentos se compensam.

$$\Sigma \mathbf{F} = 0; \Sigma \mathbf{M}_o = 0 \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{F}$  são forças que atuam no corpo (peso próprio, vento, etc.) e  $\mathbf{M}_o$  são todos os momentos (definidos por  $\mathbf{F} \times \mathbf{d}$ , “força vetorial distância de um eixo “O” de rotação”) de qualquer eixo dentro ou fora do corpo. Quando se trabalha com estruturas tridimensionais, devem-se especificar as forças e momentos próprios de cada direção (Eq. (2.2)), fazendo com que as forças sejam decompostas em componentes na direção x, y, e z, e os momentos sejam dados em relação aos eixos cartesianos. Assim, resulta:

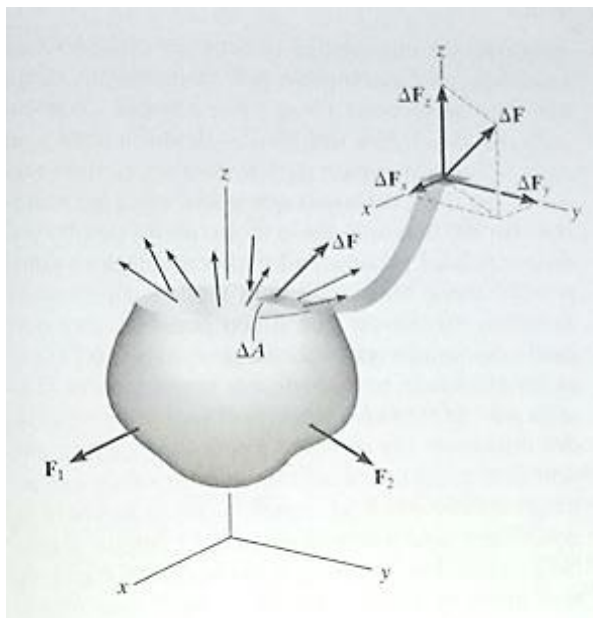
$$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0; \Sigma F_z = 0; \Sigma M_x = 0; \Sigma M_y = 0; \Sigma M_z = 0; \quad (2.2)$$

### 2.2 Tensão

Considera-se a Figura 1, que será dividida em áreas  $\Delta A$  cada vez menores, admitindo que o material é contínuo (uniforme e sem vazios) em vez de composto por um número finito de

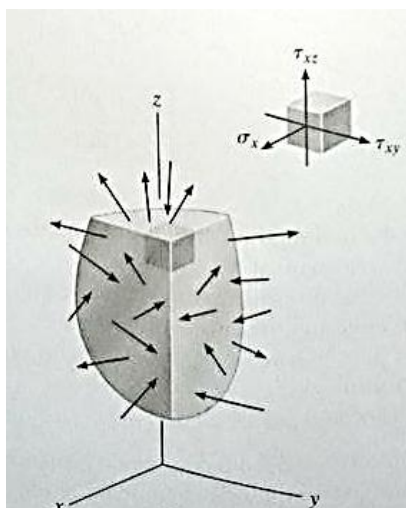


moléculas e átomos distintos, e que ele é também coeso (sem desconexões que comprometam a análise). A essa área  $\Delta A$  pode-se associar uma força  $\Delta \mathbf{F}$  finita, porém muito pequena. Substituindo essa força infinitesimal por componentes em x, y e z dos planos cartesianos, obtém-se  $\Delta \mathbf{F}_x$ ,  $\Delta \mathbf{F}_y$ ,  $\Delta \mathbf{F}_z$ , referentes às direções x, y e z respectivamente.



*Figura 1 Forças numa área infinitesimal. Fonte: Hibbeler (2010).*

À medida que  $\Delta A$  tende a zero, o mesmo ocorre com a força  $\Delta \mathbf{F}$ , de modo que o quociente entre a força sobre sua respectiva área tende a um limite finito. Dessa forma, define-se tensão considerando que uma área muito pequena estará submetida a uma força proporcional de modo que todos os quocientes das forças infinitesimais pelas áreas em que atuam tendem a um resultado uniforme (Figura 2).



*Figura 2 Componentes da tensão encontrada numa face. Fonte: Hibbeler (2010).*

### 2.2.1 Tensão normal

A intensidade da força normal por unidade de área é denominada tensão normal  $\sigma$  (sigma), e dada pela Eq. (2.3).

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \quad (2.3)$$

onde  $\Delta F_z$  é a componente normal da força  $\Delta \mathbf{F}$  em relação ao plano que contém a área  $\Delta A$ , que é de tração ou de compressão. O índice z indica que a força tem direção para fora da área e é paralela ao eixo z.

### 2.2.2 Tensão de cisalhamento

A intensidade da força de cisalhamento por área, que age tangente a  $\Delta A$ , é chamada de tensão de cisalhamento  $\tau$  (tau), e é dada por duas componentes segundo o conjunto de Eq. (2.4)

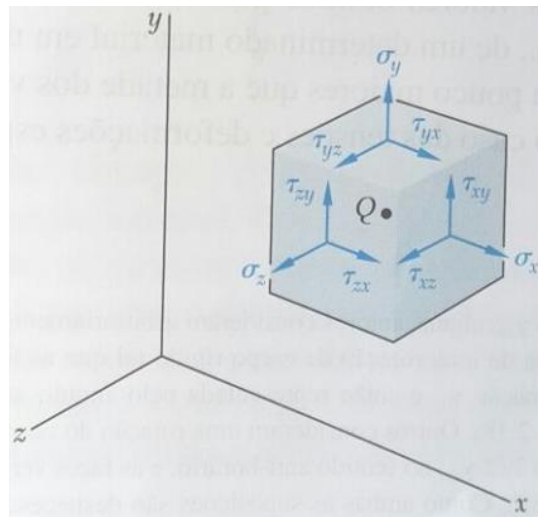
$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad \tau_{zy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \quad (2.4)$$

O índice z em ambas as componentes de cisalhamento indica que o plano da área é perpendicular ao eixo z, e os índices que seguem a ele indicam as direções das componentes (na direção de x ou na direção de y).

### 2.2.3 Estado Geral de tensão

Se, a partir da Figura 2, delimita-se um elemento de volume com faces perpendiculares aos planos  $x$ - $y$ ,  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$ , de maneira a formar um cubo infinitesimal, tem-se seis faces que apresentam as mesmas componentes da face superior do cubo, que foi analisado anteriormente.

O cubo possui componentes normais perpendiculares às suas respectivas faces e componentes de cisalhamento tangentes a elas, como ilustra a Figura 3.



*Figura 3: Estado de tensão em um cubo em torno de um ponto. Fonte: Beer (2014).*

Este cubo representa o estado de tensão em torno de um ponto do corpo. Ele possui, portanto, seis componentes normais e doze componentes tangentes aos planos. Aplicando as equações fundamentais da estática, temos que, no caso das tensões normais, as tensões de faces opostas se anulam, e no caso das cisalhantes, uma tensão cisalhante da face adjacente anula uma tensão da face vizinha. Desse modo, consideram-se as tensões de apenas três faces concomitantemente vizinhas, já que representam a mesma situação das outras faces em módulo, variando apenas os sentidos.

## 2.3 Círculo de Mohr de tensões

### 2.3.1 Transformação de tensão no plano

Segundo Hibbeler (2010), o estado geral de tensões, que tem seis componentes independentes de tensão normal e de cisalhamento que agem nas faces de um elemento do material, é muito pouco usado na prática da engenharia, onde simplificações e aproximações permitem olhar o elemento de uma forma bidimensional (um plano com tensões coplanares), conforme a Figura 4.

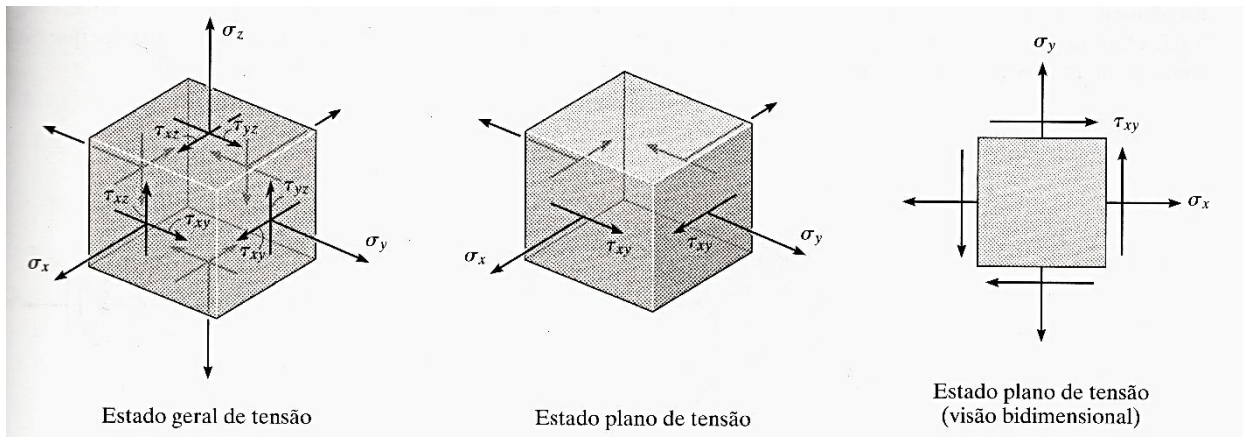


Figura 4 Simplificação das tensões para o estado plano. Hibbeler (2010).

Dessa forma, o estado geral de tensão no plano (ou estado duplo) pode ser representado com duas componentes de tensão normal,  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , e uma componente de tensão de cisalhamento,  $\tau_{xy}$ , que agem nas quatro faces do elemento consideradas em plano. Se são definidos, para efeito de análise, as direções  $x$  e  $y$  dos eixos coordenados para um objeto sujeito a certas tensões, e muda-se a orientação do plano cartesiano, pode-se notar que o objeto estará sujeito a novas tensões. Hibbeler (2010) define: “o estado plano de tensão em um ponto é representado exclusivamente por três componentes que agem sobre um elemento que tenha uma orientação específica nesse ponto”, ou seja, as tensões são dadas em relação aos eixos coordenados e, caso haja uma inclinação na sua orientação, haverá uma modificação na quantificação das tensões ao redor do mesmo ponto.

Tendo-se inicialmente um estado plano de tensões conhecido, deseja-se analisar o comportamento das tensões se os eixos de referência são modificados.

Por convenção, “tensão normal positiva age para fora de todas as faces e tensão de cisalhamento positiva age para cima na face direita do elemento” (HIBBELER, 2010). Essa convenção ajuda a entender melhor o sentido da tensão no elemento considerado.

A partir dos eixos coordenados  $x$  e  $y$ , gira-se num ângulo  $\theta$ , gerando novos eixos coordenados  $x'$  e  $y'$ , que serão usados na análise de transformação de tensão do plano (Figura 5).

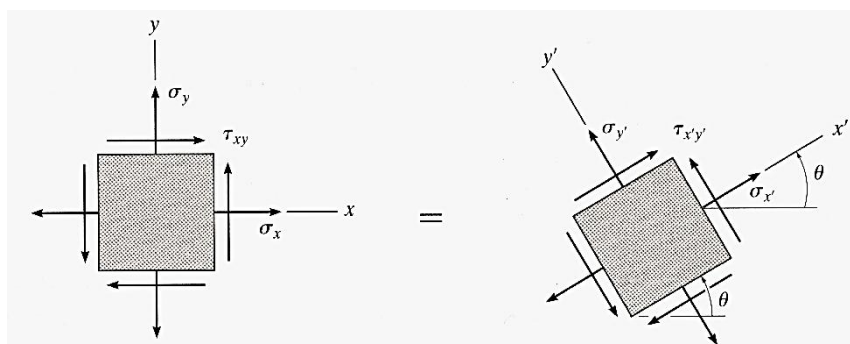


Figura 5: Mudança dos eixos de referência. Hibbeler (2010).

Para determinar as tensões em termos de  $x'$  e  $y'$ , faz-se um corte no elemento com inclinação  $\theta$ , de modo que os eixos  $x$ - $y$  e  $x'$ - $y'$  coexistam, orientando suas respectivas faces e formando um triângulo retângulo. A face gerada pelo corte e orientada pelos eixos  $x'$  e  $y'$ , de área  $\Delta A$ , está inclinada em um ângulo  $\theta$  em relação com os planos orientados por  $x$ - $y$ , ou seja, pode-se relacionar as áreas das faces orientadas por  $x$ - $y$  com a área  $\Delta A$ . Dessa forma, tem-se que as áreas das faces desse triângulo são  $\Delta A$ ,  $\Delta A \cos \theta$  e  $\Delta A \sin \theta$  (Figura 6).

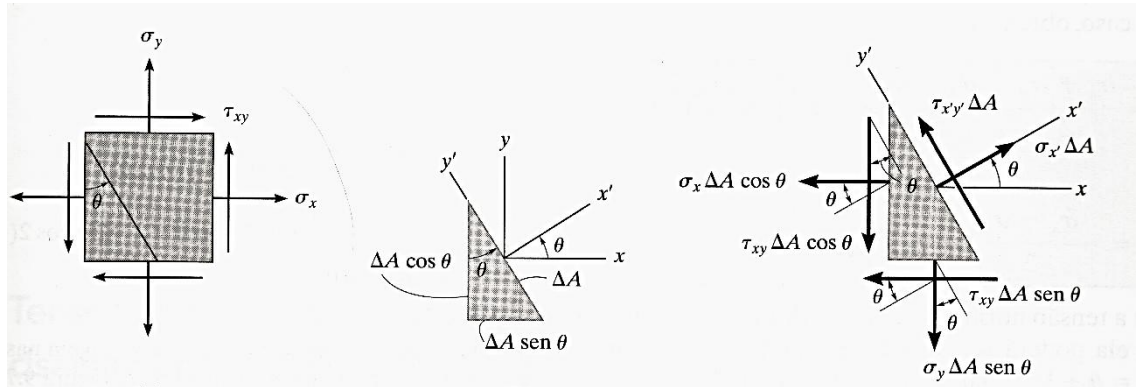


Figura 6 Áreas em função de  $\Delta A$ . Hibbeler (2010).

Como as tensões nos planos atuantes nas faces de área  $\Delta A \cos \theta$  e  $\Delta A \sin \theta$  são conhecidas, podemos determinar as forças atuantes nessas regiões, fazendo o produto das tensões pela respectiva área de atuação. Fazendo o diagrama de corpos livres e usando as equações fundamentais da Estática com referencial em  $x'$ - $y'$  (Eqs. 2.5 a 2.10), podemos obter as tensões  $\sigma_{x'}$  e  $\tau_{x'y'}$ .

$$\Sigma F_{x'} = 0; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} \Delta A - (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \cos \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \sin \theta - (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \cos \theta \\ - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} (2 \sin \theta \cos \theta) \quad (2.7)$$

$$\Sigma F_{y'} = 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} \Delta A + (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \cos \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \cos \theta \\ + (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (2.10)$$

$$\text{Usando } \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta = \frac{(1-\cos 2\theta)}{2} \text{ e } \cos^2\theta = \frac{(1+\cos 2\theta)}{2}:$$

$$\sigma_{x'} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \quad (2.11)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \quad (2.12)$$

Para obter a tensão normal na direção  $y'$ , pode-se substituir  $\theta$  por  $\theta + 90^\circ$ , já que essa é a abertura entre o eixo  $x'$  e  $y'$ :

$$\sigma_{y'} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \quad (2.13)$$

Para determinar o ângulo onde as tensões sejam máximas, basta derivar as expressões em relação ao ângulo  $\theta$  e as igualar a zero. Dessa forma obtém-se:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]} \text{ para a tensão normal máxima (tensão principal)} \quad (2.14)$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]}{\tau_{xy}} \text{ para tensão de cisalhamento máxima} \quad (2.15)$$

A partir das equações acima, podem-se formular as duas ilustrações abaixo (Figs. 7 e 8).

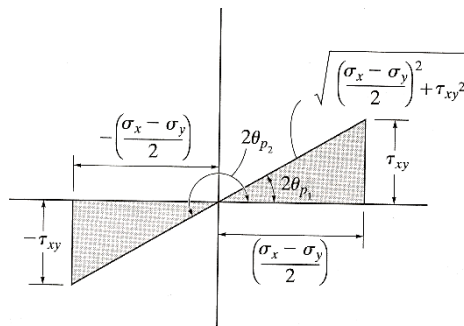
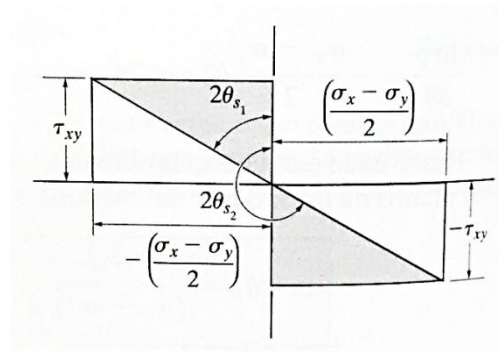


Figura 7 Representação da tangente do ângulo de máxima tensão normal. Hibbeler (2010).



*Figura 8 Representação da tangente do ângulo da tensão máxima de cisalhamento. Hibbeler (2010).*

Encontrando, a partir das figuras 8 e 9, os respectivos valores de  $\sin 2\theta$  e  $\cos 2\theta$  e substituindo nas equações de origem, obtêm-se as condições de tensões máximas:

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.16)$$

$$\tau_{\text{máx no plano}} = \sqrt{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.17)$$

E, substituindo os valores de  $\sin 2\theta_s$  e  $\cos 2\theta_s$  na Eq. 2.11, percebe-se que, no ponto de tensão de cisalhamento máxima, existe tensão normal, que vale:

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \quad (2.18)$$

### Construção do Círculo de Mohr

O Círculo de Mohr é uma ferramenta gráfica desenvolvida pelo engenheiro alemão Otto Mohr. Segundo Hibbeler (2010), é usada para facilitar a visualização da “variação das componentes de tensão normal e de cisalhamento  $\sigma_{x'}$  e  $\tau_{x'y'}$  à medida que o plano em que elas agem é orientado em diferentes direções”.

Para eliminar o parâmetro  $\theta$ , deve-se reescrever as Equações 2.11 e 2.12 da seguinte forma:

$$\sigma_{x'} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2.19)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2.20)$$

Elevando ambas ao quadrado e somando-as, obtêm-se a seguinte expressão:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2.21)$$

Usualmente, os valores de  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  são conhecidos e constantes, o que leva à forma:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{méd})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad (2.22)$$

onde  $\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  e  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ , que é de um círculo de centro  $(\sigma_{méd}, 0)$  e raio  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ .

Para iniciar a construção do círculo, primeiramente deve-se tomar um ponto de referência A, onde  $x - y$  coincide com  $x' - y'$  de maneira que  $\theta = 0^\circ$ ,  $\sigma_{x'} = \sigma_x$  e  $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}$ , de maneira que  $A = (\sigma_x, \tau_{xy})$ . A partir desses dados pode-se construir o seguinte Círculo:

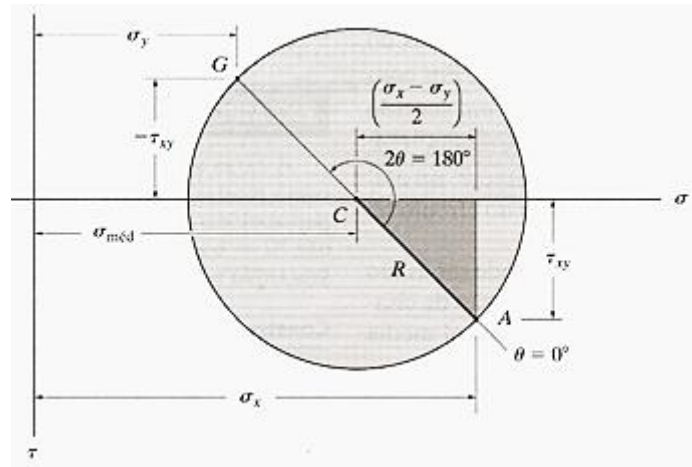


Figura 9 Círculo de Mohr para tensão no plano. Hibbeler (2010).

Caso o corpo seja submetido a apenas uma tensão normal  $\sigma_x$ , podendo se resumir a um problema unidimensional, a Equação 2.21 poderá ser escrita como:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 \quad (2.21)$$

Esta equação representa o seguinte Círculo de Mohr:



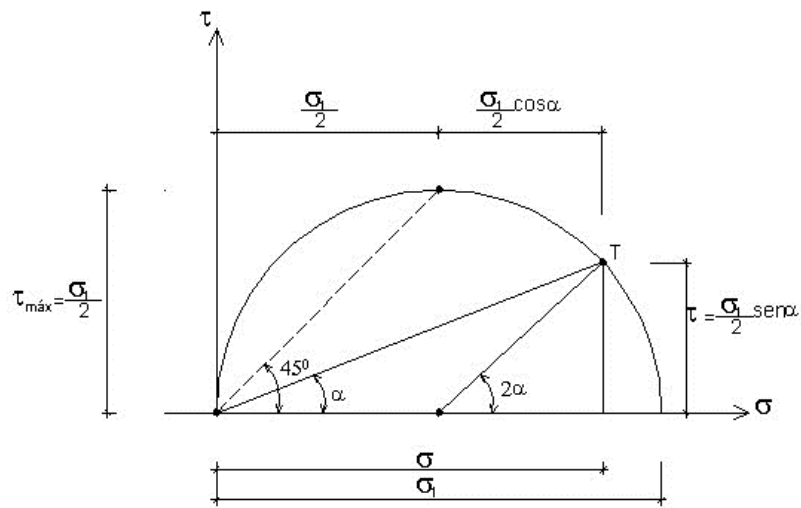


Figura10 Círculo de Mohr para tensões unidimensionais. Fonte: Mascia (2006).

### 2.3.2 Exemplo de construção de Círculo de Mohr para o Estado Plano

A seguir, apresenta-se um exemplo numérico da construção do Círculo de Mohr, conforme Hibbeler (2010).

Dado que um elemento está submetido a tensões, como mostra a Figura 2.11, construa o círculo de Mohr.

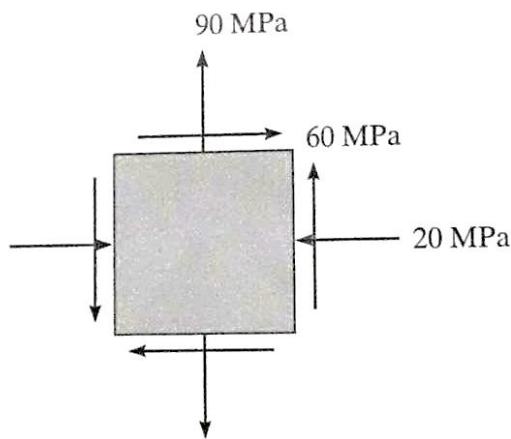


Figura 11 Condições do elemento. Fonte: Hibbeler (2010).

Calculando as tensões normal média, principais e máximas cisalhamento:

$$\sigma_{méd} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-20 + 90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + 60^2} \Rightarrow \sigma_1 = 116,4 \text{ MPa e } \sigma_2 = -46,4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + 60^2} = 81,4 \text{ MPa}$$

$\therefore$  O círculo possuirá um raio  $R = 81,4$  e centro  $C (35,0)$ .

Para indicar o estado inicial do corpo, deve-se encontrar um dos ângulos para onde há tensão máxima (seja normal ou de cisalhamento).

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = -\frac{(-20 - 90)/2}{60} \Rightarrow 2\theta_s = \operatorname{arctg} \left[ -\frac{(-20 - 90)/2}{60} \right] = 42,5^\circ \Rightarrow \theta_s = 21,3^\circ$$

$\therefore$  O estado inicial do corpo se encontra a  $42,5^\circ$  do ponto onde a tensão de cisalhamento é máxima.

A partir das informações anteriormente apresentadas pode-se elaborar o seguinte Círculo:

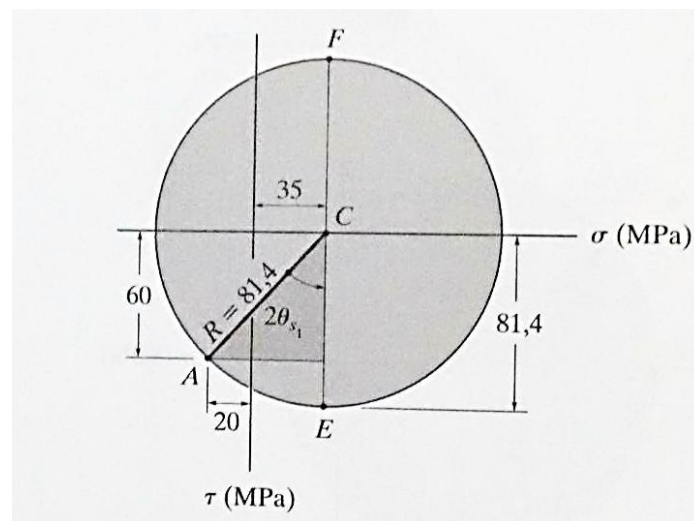


Figura 12 Círculo de Mohr. Fonte: Hibbeler (2010).

Pode-se também calcular o ângulo entre a tensão normal máxima e o estado inicial do corpo:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{60}{(-20 - 90)/2} \Rightarrow 2\theta_p = \operatorname{arctg} \left[ \frac{60}{(-20 - 90)/2} \right] \Rightarrow 2\theta_p = 47,5^\circ \Rightarrow \theta_p = 23,7^\circ$$

### 2.3.3 Estado geral de tensão

Hibbeler (2010) ilustra um estado geral (Figura 3) que possui seis componentes normais e doze cisalhantes que, através de um processo descrito posteriormente, pode ser representado após

uma mudança adequada nos eixos como um estado triaxial, onde o objeto passa a estar sujeito a apenas forças normais  $\sigma_{m\acute{a}x}$ ,  $\sigma_{int}$  e  $\sigma_{m\grave{m}n}$ , que são equivalentes ao estado primeiramente apresentado (Figura 13).

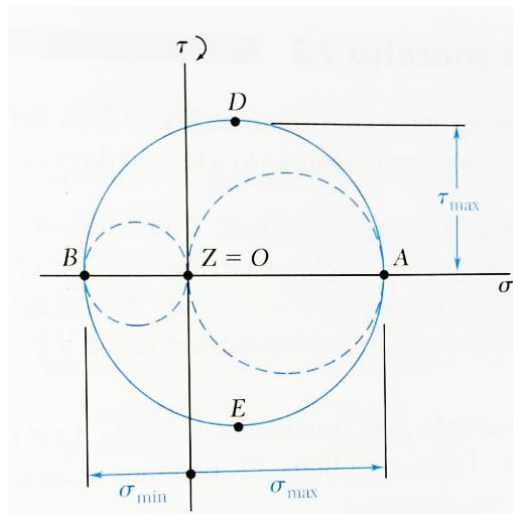


Figura 13 Círculo de Mohr genérico do estado geral. Fonte: Hibbeler (2010).

Apesar de cada um dos três círculos apresentarem uma tensão de cisalhamento máxima, existe uma tensão de cisalhamento máxima absoluta  $\tau_{abs\ m\acute{a}x}$ , que descreve a maior tensão cisalhante que o objeto tridimensional pode estar sujeito. Pode-se equacionar então:

$$\tau_{abs\ m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\grave{m}n}}{2} \quad (2.22)$$

$$\sigma_{m\acute{e}d} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\grave{m}n}}{2} \quad (2.23)$$

## CÁLCULO DAS TENSÕES MÍNIMA, INTERMEDIÁRIA E MÁXIMA

Segundo Mascia (2006), o problema de encontrar as tensões principais num estado geral de tensões consiste em resolver o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \sigma_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

A expansão de (2.24) leva a uma equação do 3º grau do tipo, conforme Mascia (2006):

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.25)$$

A resolução da equação (2.25) resulta em 3 valores  $\sigma$ , sendo o maior  $\sigma_1$ , o intermediário  $\sigma_2$  e o menor  $\sigma_3$ . Cumpre notar que os parâmetros “I” necessários na equação (2.25) são os chamados INVARIANTES DE TENSÃO e são dados, conforme Mascia (2006), por:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.26)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \quad (2.27)$$

$$I_3 = \det \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Laier e Barreiro (2001) apresentam as chamadas FÓRMULAS DE CARDAN, uma forma de resolver equações de 3º grau do tipo da equação (2.25). Segundo esta teoria, genericamente, se quer encontrar as raízes da seguinte equação:

$$x^3 + a * x^2 + b * x + c = 0 \quad (2.29)$$

O primeiro passo é calcular 2 parâmetros chamados R e Q:

$$R = \frac{1}{2} * \left( \frac{b * a}{3} - c - \frac{2 * a^3}{27} \right) \quad (2.30)$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{27} * \left( \frac{a^2}{3} - b \right)^3 - R^2} \quad (2.31)$$

O segundo passo é calcular 2 parâmetros chamados  $\rho$  e  $\theta$ :

$$\rho = \sqrt{R^2 - Q^2} \quad (2.32)$$

$$\theta = \text{arc.tg} \left( \frac{Q}{R} \right) \quad (2.33)$$

O terceiro passo é calcular 3 parâmetros chamados  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ :

$$y_1 = 2 * \sqrt[3]{\rho} * \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \quad (2.34)$$

$$y_2 = 2 * \sqrt[3]{\rho} * \cos\left(\frac{(2 * \pi) - \theta}{3}\right) \quad (2.35)$$

$$y_3 = 2 * \sqrt[3]{\rho} * \cos\left(\frac{(2 * \pi) + \theta}{3}\right) \quad (2.36)$$

O último passo é calcular as três raízes da equação  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ :

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3} \quad (2.37)$$

$$x_2 = y_2 - \frac{a}{3} \quad (2.38)$$

$$x_3 = y_3 - \frac{a}{3} \quad (2.39)$$

Laier e Barreiro (2001) apresentam um exemplo numérico, reproduzido a seguir.

Num dado ponto de uma estrutura são conhecidas as componentes do estado de tensão, ou seja:

$$\sigma_x = 0,3 \text{ tf/cm}^2 \quad \sigma_y = 0,7 \text{ tf/cm}^2 \quad \sigma_z = 0,8 \text{ tf/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = -0,4 \text{ tf/cm}^2 \quad \tau_{yz} = 0,2 \text{ tf/cm}^2 \quad \tau_{zx} = 0,5 \text{ tf/cm}^2$$

Pede-se, em primeiro lugar, as tensões principais e as direções onde ocorrem; em segundo lugar, sabendo-se que se trata de material elástico, linear e isótropo, com  $E = 2 \times 10^3 \text{ tf/cm}^2$  e  $\nu = 0,3$ , pedem-se as deformações principais.

Pois bem, de (2.24) tem-se:

$$\det \begin{vmatrix} 0,3 - \sigma_{x'} & -0,4 & 0,5 \\ -0,4 & 0,7 - \sigma_{x'} & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,8 - \sigma_{x'} \end{vmatrix} = 0$$

ou seja:

$$\sigma_{x'}^3 - 1,8\sigma_{x'}^2 + 0,56\sigma_{x'} + 0,227 = 0$$

De acordo com a forma canônica têm-se, então:

$$a = -1,8$$

$$b = 0,56$$

$$c = 0,227$$

e, com isso, de (2.30) e (2.31), têm-se que:

$$R = \frac{1}{2} \left[ \frac{0,56(-1,8)}{3} - 0,227 - \frac{2(-1,8)^3}{27} \right]$$

$$Q = \sqrt{\frac{1}{27} \left[ \frac{(-1,8)^2}{3} - 0,56 \right]^3 - (-0,655)^2} = 0,0303$$

Como esses valores, (2.32) e (2.33), têm-se:

$$\rho = \sqrt{(-0,0655)^2 + (0,0303)^2} = 0,0722$$

$$tg\theta = \frac{0,0303}{-0,0655} \therefore \theta = 155,2^\circ (-24,8^\circ)$$

Finalmente, de (2.34) a (2.36), têm-se:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{0,0722} \cos\left(\frac{155,2}{3}\right) = 0,516$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{0,0722} \cos\left(\frac{360-155,2}{3}\right) = 0,308$$

$$y_3 = 2\sqrt[3]{0,0722} \cos\left(\frac{360+155,2}{3}\right) = -0,824$$

E das equações (2.36) a (2.39), têm-se as raízes:

$$\sigma_1 = 1,116 \text{ tf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 0,908 \text{ tf/cm}^2$$

$$\sigma_3 = -0,224 \text{ tf/cm}^2$$

## 2.4 Deformação

Segundo (HIBBELER, 2010) os materiais sofrem mudanças em seus arranjos conforme são submetidos a forças. Essas mudanças podem ser visíveis (como um elástico) ou quase insignificantes (como um edifício com mais pessoas do que o usual caminhando dentro dele). Verifica-se mudanças de volume e forma, que podem ser medidas em laboratório e relacionadas às cargas que foram submetidas.

### 2.4.1 Deformação normal

Segundo (HIBBELER, 2010), chama-se deformação normal o alongamento ou contração de um segmento de reta por unidade de comprimento. Quando um objeto (Figura 14) é submetido a forças, um segmento de reta fixo de comprimento  $\Delta S$  é deformado com o restante do objeto até atingir um novo comprimento  $\Delta S'$ .

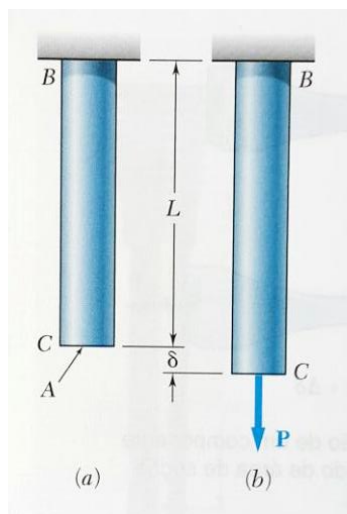


Figura 14 Deformação devido a uma carga normal. Fonte: Beer et. al. (2014).

A variação de comprimento que sofreu é dada por:

$$\varepsilon_{méd} = \frac{(\Delta S' - \Delta S)}{\Delta S} \quad (2.40)$$

onde  $\varepsilon_{méd}$  (epsílon médio) é a deformação normal média, lembrando que esses valores referem-se a distâncias infinitesimais.



## 2.4.2 Deformação de cisalhamento

Segundo (BEER e JOHNSTON, 2014), quando um objeto cúbico infinitesimal está sujeito a forças de cisalhamento, este é deformado formando um paralelepípedo oblíquo. A figura 15 mostra a atuação dessas tensões nas faces com orientação positiva de  $x$  e  $y$ .

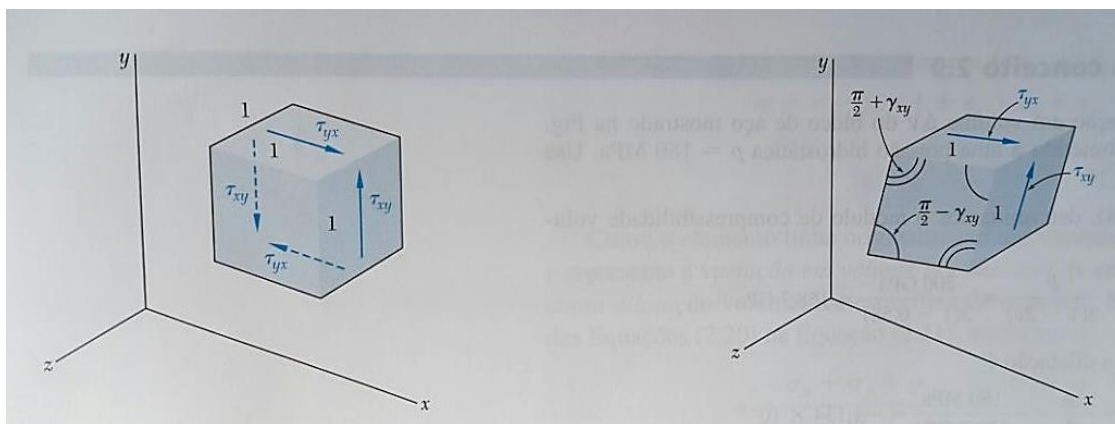


Figura 15 O efeito de tensões de cisalhamento. Fonte: Beer et. al. (2014).

Essa deformação provoca uma redução no ângulo formado pelas faces cuja orientação é positiva nos sentidos  $x$  e  $y$  respectivamente, e um aumento de igual intensidade nos ângulos restantes. Essa deformação angular, chamada de deformação de cisalhamento  $\gamma_{xy}$ , e é dada em radianos. Como a deformação é negativa no ângulo formado pelas faces orientadas positivamente pelos eixos, essa deformação é positiva.

Quando houver tensões de cisalhamentos em outras direções a deformação de dará de forma análoga, obedecendo os devidos referenciais.

## 2.5 Círculo de Mohr de deformações

### 2.5.1 Transformações de deformação no plano

Considerando apenas as deformações em estado plano, ou seja, uma situação que possa ser representada, sem prejuízo, bidimensionalmente, de maneira geral tem-se as deformações normais  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ , e as deformação cisalhante  $\gamma_{xy}$ . Para analisar essas deformações são estabelecidos eixos coordenados  $x$  e  $y$ , usados para referenciar a atuação de cada deformação, e é tomado um elemento de volume infinitesimal cúbico de aresta  $\Delta S$ . Com a atuação dessas deformações, esse elemento de

volume é transformado em um paralelogramo de arestas de comprimentos  $\Delta S(1+\epsilon_x)$  e  $\Delta S(1+\epsilon_y)$ , que forma ângulos  $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$  e  $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$  entre si (Figura 16)

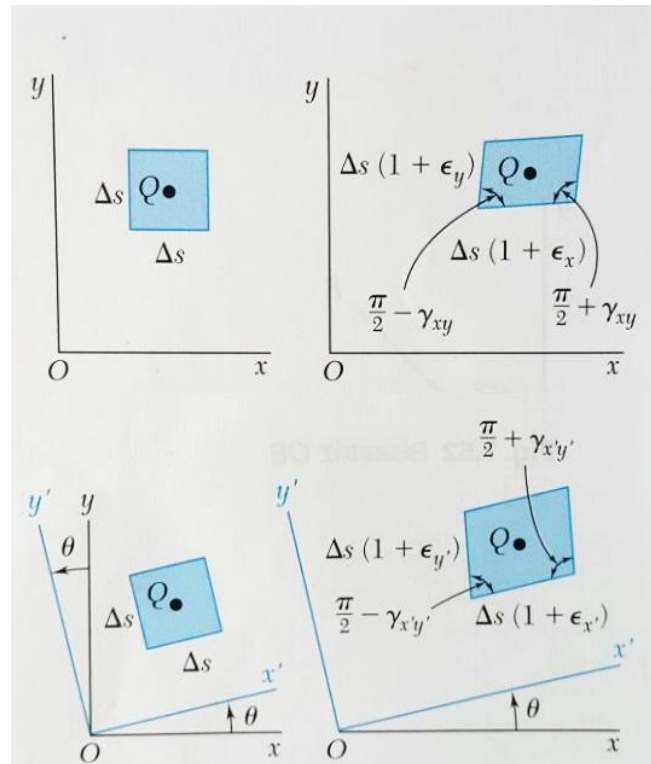


Figura 16 Giro dos eixos de referência. Fonte: Beer et. al. (2014).

Beer et. al.(2014) analisam as componentes da tensão quando os eixos coordenados são deslocados em  $\theta$  graus, gerando as novas referências  $x'$  e  $y'$ . Dessa forma, o deslocamento gera uma deformação específica  $\epsilon(\theta)$ , como na figura 17.

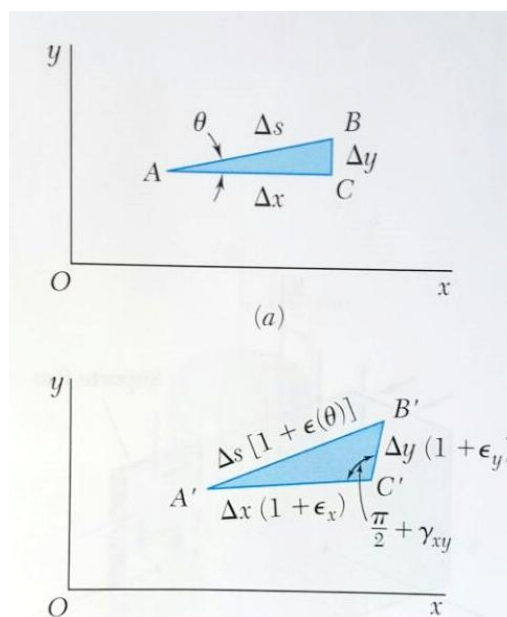


Figura 17 Nova deformação. Fonte: Beer et. al. (2014).

Pode-se escrever  $\Delta S[1 + \varepsilon(\theta)]$  em função de  $\theta$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ :

$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (C'B')^2 - 2(A'C')(C'B') \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} (\Delta S)^2[1 + \varepsilon(\theta)]^2 &= (\Delta x)^2(1 + \varepsilon_x)^2 + (\Delta y)^2(1 + \varepsilon_y)^2 \\ &\quad - 2(\Delta x)(1 + \varepsilon_x)(\Delta y)(1 + \varepsilon_y) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Considerando  $\Delta x = (\Delta S)\cos\theta$  e  $\Delta y = (\Delta S)\sin\theta$ , e que  $\gamma_{xy}$  é muito pequeno, de maneira que  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) = -\sin\gamma_{xy} \approx -\gamma_{xy}$ , tem-se que :

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad (2.43)$$

Percebe-se que a Equação 2.25 expressa a deformação específica normal ao longo do eixo  $x'$ , dessa forma, através das equações  $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$ ,  $\sin^2\theta = \frac{(1-\cos 2\theta)}{2}$  e  $\cos^2\theta = \frac{(1+\cos 2\theta)}{2}$ , ela pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (2.44)$$

Para obter  $\varepsilon_{y'}$ , substitui-se  $\theta$  por  $\theta + 90^\circ$ , chegando a:

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (2.45)$$

E para equacionar  $\gamma_{x'y'}$ , substituímos  $\theta$  por  $\theta + 45^\circ$ , obtendo:

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta - \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (2.46)$$

## 2.5.2 Construção do círculo de Mohr para estado plano de deformação

As equações que expressam os valores máximos de tensões e ângulos para o Círculo de Mohr para tensões são as mesmas para os máximos em deformações. Dessa forma, tem-se o seguinte conjunto de equações:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right]^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_{\text{méd}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad (2.48)$$

$$\gamma_{\text{máx no plano}} = 2R = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\gamma_{xy})^2} \quad (2.49)$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \text{ para a deformação normal máxima} \quad (2.50)$$

$$\tan 2\theta_c = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} \text{ para a deformação cisalhante máxima} \quad (2.51)$$

Para construir o Círculo de Mohr para deformações, tem-se por base a seguinte equação de círculo:

$$(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{\text{méd}})^2 + \gamma_{x'y'}^2 = R^2 \quad (2.52)$$

O resultado geral dessa equação está representado na Figura 18 abaixo:

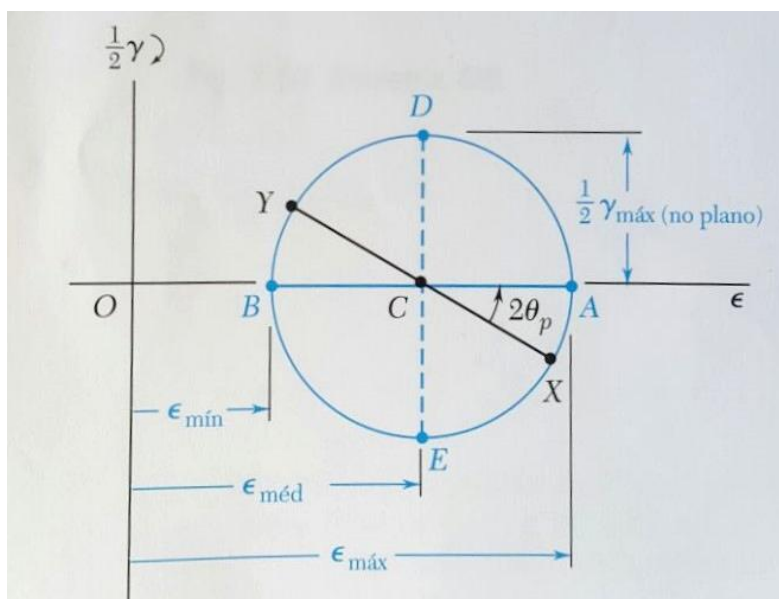


Figura 18 Círculo de Mohr para estado plano de deformações. Fonte: Beer et. al. (2014).

### 2.5.3 Construção do círculo de Mohr para estado geral de deformação

De maneira semelhante ao estado geral de tensões, Hibbeler (2010) ilustra um estado geral de deformações (Figura 19) que possui seis componentes normais e doze cisalhantes que pode ser representado após uma mudança adequada nos eixos como um estado triaxial, onde o objeto passa a estar sujeito a apenas deformações normais  $\epsilon_{m\acute{a}x}$ ,  $\epsilon_{int}$  e  $\epsilon_{m\acute{i}n}$ .

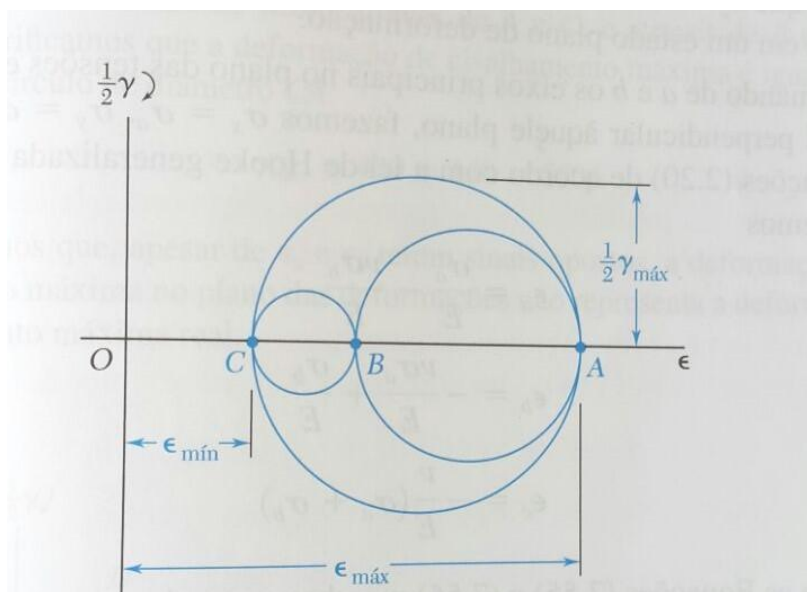


Figura 19 Círculo de Mohr genérico do estado geral de deformações. Fonte: Hibbeler (2010).

De maneira semelhante ao estado geral de tensões, segundo Villaça e Garcia (1996), o problema de encontrar as deformações principais num estado geral consiste em resolver a seguinte equação:

$$\epsilon^3 - J_1 \epsilon^2 + J_2 \epsilon - J_3 = 0 \quad (2.53)$$

A resolução da equação (2.25) resulta em 3 valores  $\epsilon$ , sendo o maior  $\epsilon_1$ , o intermediário  $\epsilon_2$  e o menor  $\epsilon_3$ . Cumpre notar que os parâmetros “J” necessários na equação (2.53) são os chamados INVARIANTES DE DEFORMAÇÃO e são dados, conforme Villaça e Garcia (1996), reescrevendo  $\epsilon_{ab}$  por  $\gamma_{ab}$ , por:

$$J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (2.54)$$


$$J_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (2.55)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (2.55)$$

A resolução de (2.53) é a mesma apresentada para o estado triplo de tensões, usando as FÓRMULAS DE CARDAN.

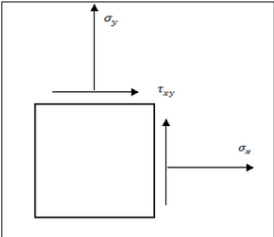
### 3. RESULTADOS

Além da revisão bibliográfica sobre o Círculo de Mohr, os resultados desta iniciação científica incluem a criação do programa, em linguagem HTML/Javascript, que calcula o círculo partindo de dados fornecidos pelos usuários e gera um relatório pdf. Ao entrar na página, disponibilizada em “<http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Mohr-tensao/mtensao.php?>”, o usuário irá visualizar o seguinte:



[VOLTAR À PÁGINA PRINCIPAL DO NEV](#)

Título	Data	Autor	Orientador	Tipo	Curso
CÁLCULO DE CÍRCULO DE MOHR	15/12/2016	<a href="#">Guilherme Augusto Rodrigues Peres Pinto</a>	<a href="#">Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl</a>	Iniciação Científica com bolsa institucional	Engenharia Civil



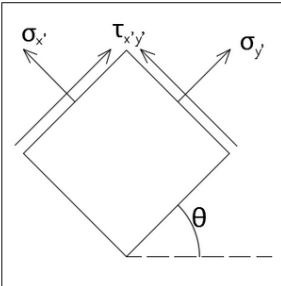
$\sigma_x$  (MPa):  
-20

$\sigma_y$  (MPa):  
90

$\tau_{xy}$  (MPa):  
10

Ângulo de inclinação (°):  
-30

Calcular e Desenhar



Tensões no plano inclinado

$\sigma_{x'}$  (MPa) =  
 $\sigma_{y'}$  (MPa) =  
 $\tau_{x'y'}$  (MPa) =

Tensões máximas

Tensão principal (MPa) =  
Ângulo da Tensão principal (°) =  
Tensão de cisalhamento (MPa) =  
Ângulo da Tensão de cisalhamento (°) =  
Tensão média (MPa) =

GERAR PDF

Figura 20 Apresentação da página criada. Fonte: o próprio autor.

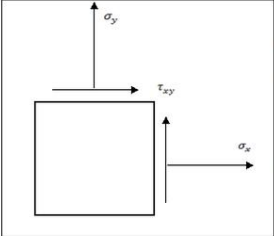
As figuras a seguir mostram os resultados fornecidos pela página a partir dos mesmos dados

de entrada do exemplo 2.3.2, descrito por Hibbeler (2010).



[VOLTAR À PÁGINA PRINCIPAL DO NEV](#)

Título	Data	Autor	Orientador	Tipo	Curso
CÁLCULO DE CÍRCULO DE MOHR	15/12/2016	<a href="#">Guilherme Augusto Rodrigues Peres Pinto</a>	<a href="#">Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl</a>	Iniciação Científica com bolsa institucional	Engenharia Civil



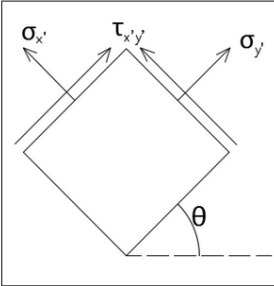
$\sigma_x$  (MPa):  
-20

$\sigma_y$  (MPa):  
90

$\tau_{xy}$  (MPa):  
10

Ângulo de inclinação (°):  
-30

Calcular e Desenhar



Tensões no plano inclinado

$\sigma_x'$  (MPa) = -1.160

$\sigma_y'$  (MPa) = 71.160

$\tau_{x'y'}$  (MPa) = -42.631

Tensões máximas

Tensão principal (MPa) = 90.902 e -20.902

Ângulo da Tensão principal (°) = -5.152 e 84.848

Tensão de cisalhamento (MPa) = 55.902

Ângulo da Tensão de cisalhamento (°) = 39.848 e 129.848

Tensão média (MPa) = 35.000

GERAR PDF

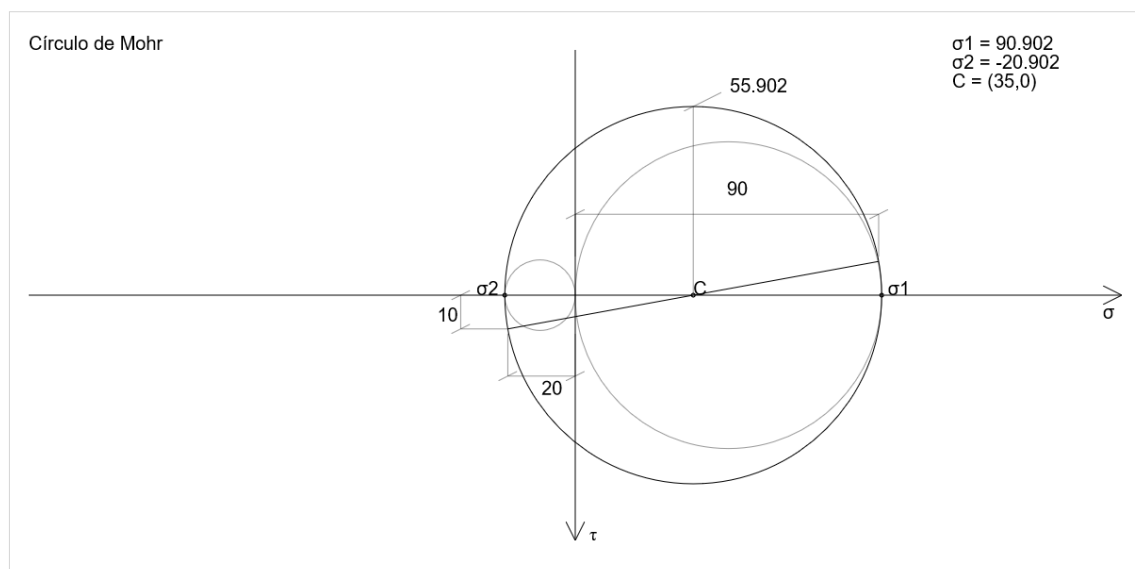


Figura 21 Resultados fornecidos pela página utilizando os mesmos dados de entrada do exemplo 2.3.2. Fonte: o próprio autor.

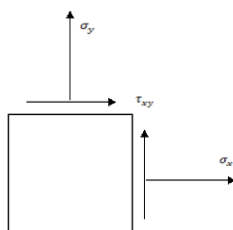


O relatório pdf gerado é apresentado em outra aba, e é apresentado da seguinte maneira:



NEV: Núcleo de Engenharia Virtual  
Título: Cálculo de Círculo de Mohr  
Data: 11/12/2016  
Autor: Guilherme Augusto Rodrigues Peres Pinto  
Orientador: Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl  
Tipo: Iniciação Científica com Bolsa Institucional  
Curso: Engenharia Civil

#### CÁLCULO DE CÍRCULO DE MOHR



Valores lidos:

Tensão  $\sigma_x = -20$  MPa

Tensão  $\sigma_y = 90$  MPa

Tensão  $\tau_{xy} = 10$  MPa

Ângulo de inclinação =  $-30^\circ$

#### CÁLCULO COM PANO DE REFERÊNCIA ROTACIONADO EM $-30^\circ$

Para calcular as componentes das tensões usa-se as seguintes equações:

$$\sigma_{x'} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Aplicando essas equações aos dados fornecidos, obtêm-se os seguintes valores:

$\sigma_{x'} = -1.160$  MPa

$\sigma_{y'} = 71.160$  MPa

$\tau_{x'y'} = -42.631$  MPa

#### CÁLCULO DAS TENSÕES PRINCIPAIS

Para calcular as tensões e ângulos principais, usa-se as seguintes equações:

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max \text{ no plano}} = \sqrt{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = -\frac{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]}{\tau_{xy}}$$

Sendo  $\theta_p$  o ângulo da tensão principal normal, e  $\theta_s$  o ângulo da tensão máxima de cisalhamento.

A partir dos dados fornecidos aplicados a essa equação, obtêm-se os seguintes valores para tensões principais, seus respectivos ângulos de ocorrência e o valor da tensão média:

Tensões principais: 90.902 MPa e -20.902 MPa

Ângulos das tensões principais: -5.152° e 84.848°

Tensão de cisalhamento: 55.902 MPa

Ângulos da tensão de cisalhamento: 39.848° e 129.848°

Tensão média: 35.000 MPa

Uma observação importante a se fazer é referente aos ângulos obtidos: tanto a equação dos ângulos principais quanto a dos ângulos de cisalhamento oferecem quatro ângulos possíveis, que tem intervalo de 90° entre eles. Aqui se fornecem apenas dois ângulos consecutivos dos resultados possíveis.

Agora que já se possui vários dados necessários à construção do Círculo de Mohr, deve-se usar o seguinte conjunto de equações para determinar o centro do círculo e seu raio:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{méd}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Com a aplicação dessas equações, obtêm-se um círculo com as seguintes características:

Centro do círculo em C(35.000, 0)

Raio do círculo = 55.902

Caso haja na figura círculos com menos destaque, eles representarão os giros ao redor dos eixos x e y, trazendo a abrangência do círculo à terceira dimensão.

## CÍRCULO DE MOHR

Círculo de Mohr

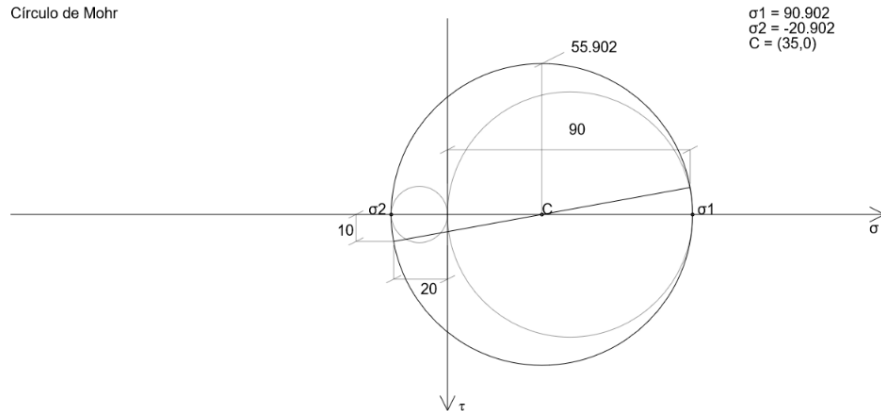


Figura 22 Resultado do relatório pdf. Fonte: o próprio autor

Para o Círculo de Mohr para deformações e suas transformações no plano, a página apresenta-se de uma forma muito semelhante. Oferece um espaço para preencher com as deformações sofridas pelo material, oferece o desenho do círculo e oferece um relatório em pdf.



[VOLTAR À PÁGINA PRINCIPAL DO NEV](#)

Título	Data	Autor	Orientador	Tipo	Curso
CÁLCULO DE CÍRCULO DE MOHR PARA DEFORMAÇÕES	15/12/2016	<a href="#">Guilherme Augusto Rodrigues Peres Pinto</a>	<a href="#">Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl</a>	Iniciação Científica com bolsa institucional	Engenharia Civil

$\epsilon_x (\mu):$

$\epsilon_y (\mu):$

$\tau_{xy} (\mu):$

Ângulo de inclinação (°)

Calcular e Desenhar

Deformações no plano inclinado

$\epsilon_{x'} (\mu) =$   
 $\epsilon_{y'} (\mu) =$   
 $\tau_{x'y'} (\mu) =$

Deformações máximas

Deformação principal ( $\mu$ ) =  
 Ângulo da Deformação principal (°) =  
 Deformação de cisalhamento ( $\mu$ ) =  
 Ângulo da Deformação de cisalhamento (°) =  
 Deformação média ( $\mu$ ) =

GERAR PDF

Figura 23 Apresentação da página Círculo de Mohr para Deformação

Ao gerar um círculo, a página calcula as transformações no plano e fornece as deformações máximas e seus respectivos ângulos, como mostra a figura 24:

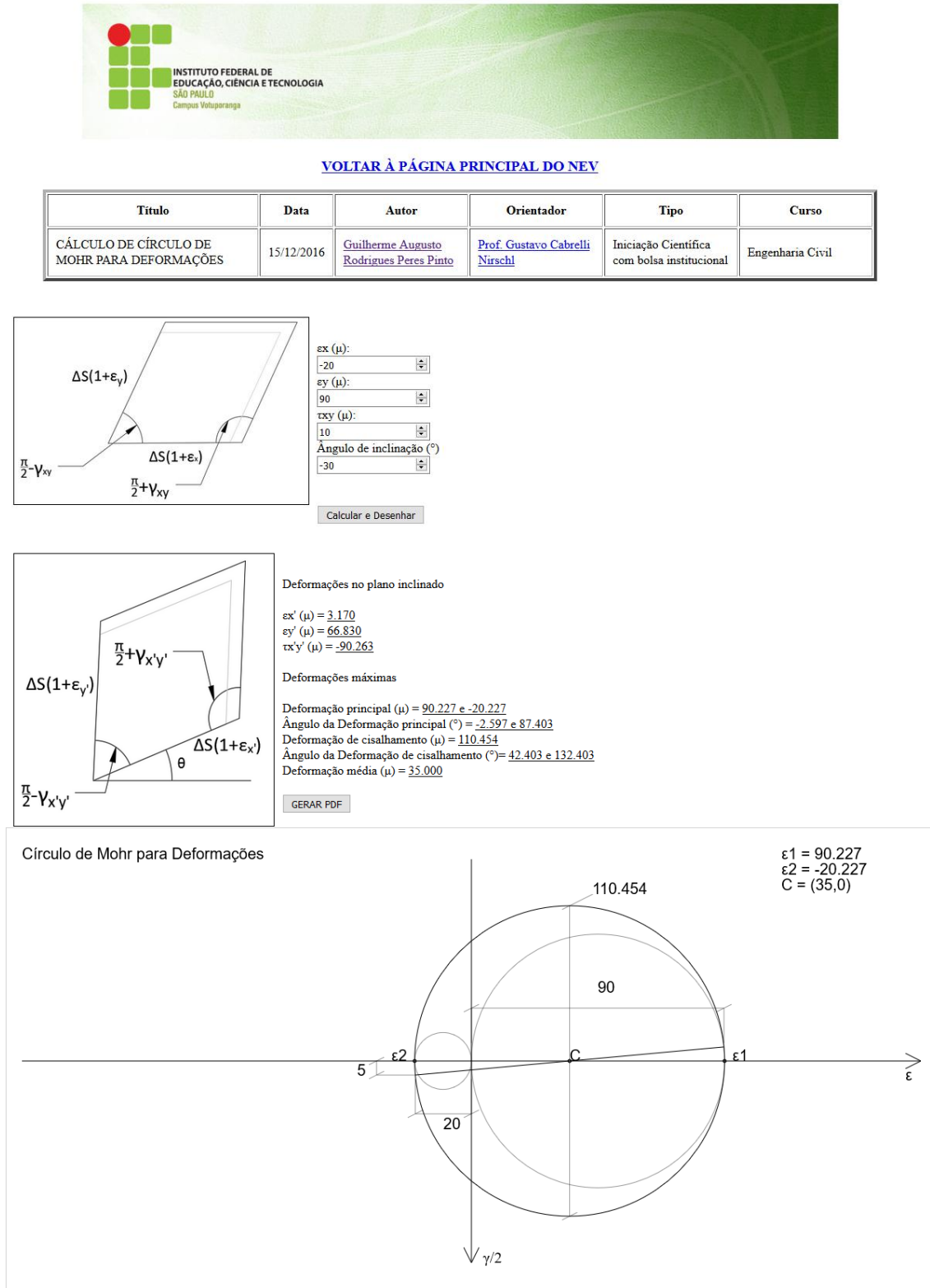
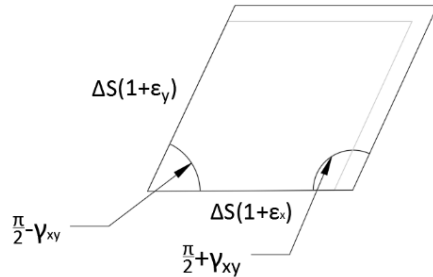


Figura 24 Resultados fornecidos pela página para deformações

Ao pressionar o botão “GERAR PDF”, uma outra aba no navegador se abre, fornecendo um relatório pdf nos seguintes moldes:

## CÁLCULO DE CÍRCULO DE MOHR PARA DEFORMAÇÕES



Valores lidos:

Tensão  $\epsilon_x = -20 \mu$

Tensão  $\epsilon_y = 90 \mu$

Tensão  $\gamma_{xy} = 10 \mu$

Ângulo de inclinação =  $-30^\circ$

### CÁLCULO COM PANO DE REFERÊNCIA ROTACIONADO EM $-30^\circ$

Para calcular as componentes das deformações usa-se as seguintes equações:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sen 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sen 2\theta$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sen 2\theta - \gamma_{xy} \cos 2\theta$$

Aplicando essas equações aos dados fornecidos, obtêm-se os seguintes valores:

$$\epsilon_{x'} = 3.170 \mu$$

$$\epsilon_{y'} = 66.830 \mu$$

$$\gamma_{x'y'} = -90.263 \mu$$

### CÁLCULO DAS DEFORMAÇÕES PRINCIPAIS

Para calcular as deformações e ângulos principais, usa-se as seguintes equações:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right]^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{\text{méd}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$

$$\gamma_{\text{máx no plano}} = 2R = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\gamma_{xy})^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\tan 2\theta_c = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}}$$

Sendo  $\theta_p$  o ângulo da deformação principal normal, e  $\theta_s$  o ângulo da deformação máxima de cisalhamento.

A partir dos dados fornecidos aplicados a essa equação, obtêm-se os seguintes valores para deformações principais, seus respectivos ângulos de ocorrência e o valor da deformação média:

Deformações principais: 90.227  $\mu$  e -20.227  $\mu$

Ângulos das deformações principais: -2.597° e 87.403°

Deformação de cisalhamento: 55.227  $\mu$

Ângulos da deformação de cisalhamento: 42.403° e 132.403°

Deformação média: 35.000  $\mu$

Uma observação importante a se fazer é referente aos ângulos obtidos: tanto a equação dos ângulos principais quanto a dos ângulos de cisalhamento oferecem quatro ângulos possíveis, que tem intervalo de 90° entre eles. Aqui se fornecem apenas dois ângulos consecutivos dos resultados possíveis.

Agora que já se possui vários dados necessários à construção do Círculo de Mohr para deformações, deve-se usar a seguinte equação para determinar o centro do círculo e seu raio:

$$(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{\text{méd}})^2 + \gamma_{x'y'}^2 = R^2$$

Com a aplicação dessas equações, obtêm-se um círculo com as seguintes características:

Centro do círculo em C(35.000, 0)

Raio do círculo = 55.227

Caso haja na figura círculos com menos destaque, eles representarão os giros ao redor dos eixos x e y, trazendo a abrangência do círculo à terceira dimensão.

### CÍRCULO DE MOHR PARA DEFORMAÇÕES

Círculo de Mohr para Deformações

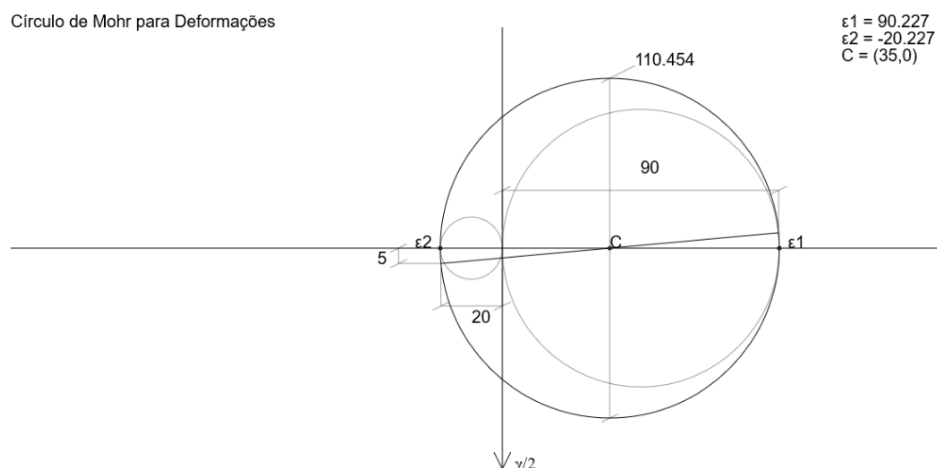


Figura 25 Relatório pdf para deformação

## 4. CONCLUSÕES

A página criada mostra resultados coerentes com vários exemplos retirados de Hibbeler (2010) e Beer (2011). De acordo com a meta inicial do projeto, a visualização de todo o passo a passo de resolução em arquivo pdf permite a profissionais, professores e estudantes compreenderem melhor a criação de Círculos de Mohr de Tensão e Deformação.

Por fim, cumpre citar que os programas poderão sofrer melhorias em relação ao que foi apresentado neste relatório para se adequarem aos objetivos pedagógicos, de modo a facilitar a compreensão dos alunos e de qualquer pessoa que acessar o site. Portanto, esperam-se atualizações oportunas na interface, gráficos e relatório de cada página, considerando que a iniciação científica irá continuar.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.Jr. **Resistência dos materiais**.3.ed. São Paulo: Makron Books, 2011.

BEER, F.P.; et. al. **Mecânica dos materiais**.7.ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos materiais**.7.ed. São Paulo: Pearson, 2010.

LAIER, J. E.; BARREIRO, J.C. **Complementos de Resistência dos materiais**.2.ed. São Carlos: EESC-USP, 2001.

MASCIA, Nilson Tadeu. **Teoria das tensões**. UNICAMP. Campinas, 2006. Disponível em: <<http://www.fec.unicamp.br/~nilson/apostilas/Tensoes.pdf>>. Acesso em: Abril de 2015.

VILLAÇA, S.F.; GARCIA, L.F. **Introdução à teoria da elasticidade**.1.ed. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1996.

**W3 schools**.Disponível em <<http://www.w3schools.com>>. Acesso em 15/05/2015.